

ЛЕКЦІЯ №14

Аналіз динаміки систем із одним ступенем свободи.

Раніше ми познайомилися з інтегралами руху, що впливають із основних принципів механіки. У однорідному просторі їх сім, і цього достатньо для вирішення задачі про рух двох тіл, що взаємодіють, зокрема, для вирішення задачі Кеплера і перевірки справедливості рівнянь Ньютона. Послідовно використовуючи інтеграли руху, і зменшуючи кількість динамічних змінних, що залишилися, ми доходимо в кінці до завдання про динаміку системи з одним ступенем свободи, яка являє собою завдання про рух матеріальної точки в одновимірному потенціалі. Тому почнемо саме із дослідження одномірного руху.

Найпростішим завданням про одномірний рух є дослідження динаміки **гармонійного осцилятора**. Він описує рух частинки маси m у зовнішньому полі з потенційною енергією

$$U = \frac{k}{2} x^2, \quad (14.1)$$

де x – координати частки.

Рівняння, що описує гармонічний осцилятор, має простий вигляд для зміщення частки $x(t)$:

$$m\ddot{x} + kx = 0. \quad (14.2)$$

Ми знаємо рішення цього рівняння:

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t + \phi), \quad (14.3)$$

де частота лінійних коливань дорівнює $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Оскільки (14.2) – це рівняння другого порядку, воно має містити дві довільні константи, наприклад, початкову координату x_0 і початкову швидкість \dot{x}_0 . У виразі (14.3) як довільні константи обрані амплітуда a і фаза ϕ рішення, пов'язані з початковими умовами: $a = \sqrt{x_0^2 + \dot{x}_0^2 / \omega_0^2}$ і $\phi = -\arctg(\omega_0 \dot{x}_0 / x_0)$. У тому, що вираз (14.2) є рішенням рівняння (14.2), легко перекопатися прямою підстановкою. Якби ми не знали цього рішення, то могли б поступитися так. Рівняння (14.2) є лагранжовим для лагранжіана

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2. \quad (14.4)$$

За загальними правилами механіки з цим лагранжіаном будується інтеграл руху – енергія

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{k}{2} x^2. \quad (14.5)$$

З допомогою ми можемо знизити порядок рівняння і звести рішення до квадрата турів, тобто. уявити його у вигляді невизначеного інтеграла:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_*} \frac{dx}{\sqrt{E - kx^2/2}} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_*} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = \frac{1}{\omega_0} \int_{x_*} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (14.6)$$

де ми врахували, що, як випливає з (14.5), енергія пов'язані з амплітудою коливання: $E = ka^2/2 = ma^2\omega_0^2/2$. Вираз (14.6) містить дві константи: амплітуду a та константу інтегрування x_* . Вибір останньої відповідає вибору початку відліку часу t_0 . Тобто. вираз (14.6) можна переписати у вигляді

$\omega_0(t - t_0) = \int_0^x dx / \sqrt{a^2 - x^2}$, де координата в момент t_0 дорівнює нулю.

Звичайно, ми отримали табличний інтеграл, рішення якого добре відоме: $\omega_0 t + \phi = \arcsin(x/a)$. Тобто ми приходимо до виразу (14.2). Але якщо ми не знаємо цього табличного і нетграла, то як можна відновити якісно динаміку системи? Цю якісну залежність можна відновити, скориставшись методами **якісного аналізу динамічних систем**. Оскільки надалі ми нею часто користуватимемося, то зупинимося на ній, у додатку до цієї найпростішої системи.

До якісного аналізу динамічних систем. Метод фазової площини.

Подаємо вихідне рівняння другого порядку (14.2) у вигляді системи двох рівнянь першого порядку (таке уявлення пов'язане з гамільтоновим підходом у механіці):

$$\dot{x} = v, \quad (14.6)$$

$$\dot{v} = -\omega_0^2 x. \quad (14.7)$$

При цьому вираз для енергії можна представити як співвідношення між координатою і швидкістю

$$v^2 + \omega_0^2 x^2 = 2E / m = \omega_0^2 a^2 . \quad (14.8)$$

Динаміку системи можна зобразити на площині (x, v) . Вона фактично збігається з площиною (x, p) , де p - імпульс частинки, і називається **фазовою площиною**. Руху «реальної» частинки з однією координатою у «фізичному» просторі (x) (так званому **конфігураційному просторі**) відповідає рух **зображувальної точки** з двома «координатами» x та v у **фазовому просторі** (x, v) . При цьому перші співвідношення (14.6) і (14.7) задають напрямки переміщення зображувальної точки на фазовій площині, а рівняння (14.8) описує її траєкторію, так звану фазову **траєкторію**. Для гармонійного осцилятора фазові траєкторії є еліпсами. Різні значення енергії E задають сімейство фазових траєкторій та повний **фазовий портрет** системи. Порівняльна картина руху в конфігураційному та фазовому просторах зображена на Рис.4.1. У верхній напівпросторі фазової площини зображувальні точки рухаються зліва направо, а в нижній – справа наліво.

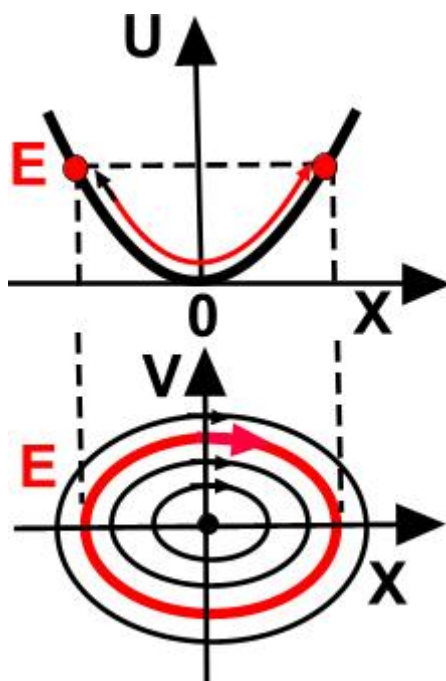


Рис.4.1. Рух гармонійного осцилятора в конфігураційному просторі (верхній малюнок) і відповідний рух точки, що зображує, у фазовому просторі (внизу).

Виділена жирна лінія на фазовому портреті відповідають певній енергії руху та траєкторії на верхньому малюнку. На ньому відзначені так звані

«точки повороту», в яких $v=0$ і повна енергія збігається з потенційною енергією.

З малюнка 4.1 видно що у фазовому портреті є особлива точка – **точка зупинки** с $x=v=0$. Ця особлива точка називається **особливою точкою типу центру**. З аналізу фазового портрета видно, що частка робить періодичні коливальні рухи, і зі зростанням енергії зростає амплітуда колювання (лінійні розміри еліпсів траєкторій зображувальної точки). З рішення (14.3) для гармонійного осцилятора видно, що частота колювання гармонійного осцилятора залежить від амплітуди та енергії, тобто. рух усіх точок на фазовому портреті відбувається **ізохронно**, що є властивістю гармонійного осцилятора.

Перейдемо до розгляду загальних властивостей одномірного руху при довільному вигляді потенційної енергії. У загальному випадку рухи в консервативній системі з одним ступенем свободи та енергією $E = mV^2 / 2 + U(x)$ система (14.6, 4.7) перетворюється на вид

$$\dot{x} = v, \quad (14.9)$$

$$\dot{v} = -\frac{1}{m} \frac{dU(x)}{dx}, \quad (14.10)$$

а при врахуванні збереження енергії швидкість залежить від координти таким чином:

$$v = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U(x)}. \quad (14.11)$$

На Рис.4.2 наведено приклад потенційної енергії складного виду (верхній рисунок).

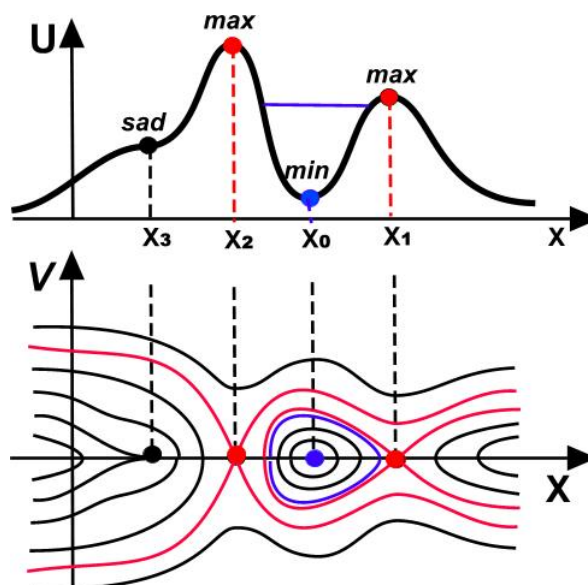


Рис.4.2. Потенційна енергія складного вигляду та відповідний їй фазовий портрет.

На наведеному малюнку потенційна енергія містить дві точки максимуму, точку мінімуму та сідлову точку. Цим вичерпуються спеціальні точки функціональної залежності. При русі частинки поблизу точки мінімуму x_0 потенційна енергія при малих амплітудах коливання може бути замінена квадратичну параболу. На фазовому портреті цієї точки відповідає особлива точка типу центр, розглянута вище (Рис.4.1).

Перейдемо до виду фазового портрета під час руху частинки поблизу точок максимумів.

Поблизу максимумів (точки x_1 та x_2 на Рис.4.2) потенційну енергію можна замінити парабололами. Поблизу точки $x = x_1$, в якій енергія досягає максимуму $E = E_1$, потенційна енергія має вигляд $U = E_1 - \kappa(x - x_1)^2 / 2$. Відповідне динамічне рівняння записується так:

$$\ddot{x} - \mu^2(x - x_1) = 0, \quad (14.12)$$

с $\mu = \sqrt{\kappa / m}$. Вирішення цього рівняння очевидні:

$$x - x_1 = \sqrt{2(E - E_1) / \mu^2} \operatorname{sh}(\mu t + \varphi), \quad E > E_1, \quad (14.13)$$

$$x - x_1 = \sqrt{2(E_1 - E) / \mu^2} \operatorname{ch}(\mu t + \varphi), \quad E < E_1. \quad (14.14)$$

Відповідний фазовий портрет наведено на Рис.4.3. Максимуму потенційної енергії також відповідає особлива точка, яка називається **сідловою особливою точкою (сідлом)**. Ця особлива точка, очевидно, нестійка: малі відхилення координати від екстремального значення x_1 призводить до відходу частки на нескінченність із позитивними та негативними значеннями x . Рішення (14.13) відповідає «прогоновим» траєкторіям, а рішення типу (14.14) – відбивним траєкторіям із відображенням частинок від бар'єру в точках повороту (сині на малюнку).

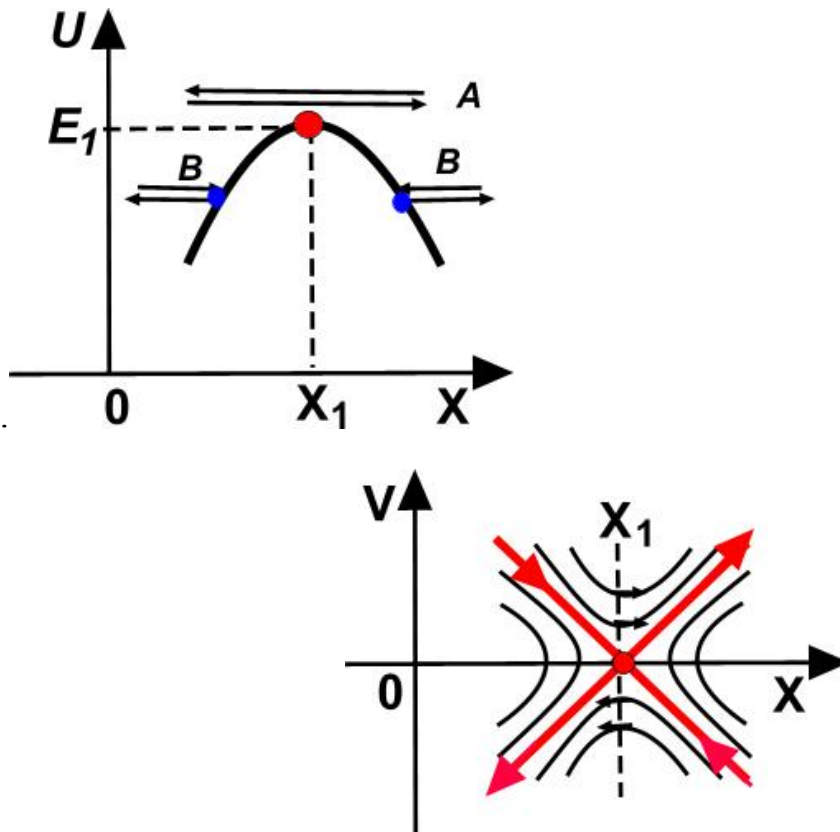


Рис.4.3. Особлива точка типу «сідла» на фазовій площині та відповідна точка максимуму на профілі потенційної енергії.

З фазового портрета видно існування виділених фазових траєкторій (виділені на Рис.4.3), які поділяють області фазового портрета з різним характером траєкторій. Перші, «пролітні» траєкторії з $E > E_1$ відповідають руху частки від $x = -\infty$ до та $x = +\infty$ назад. Траєкторії іншого типу відповідають « $E < E_1$ відбиттю» частинки від потенційного горба. Зазначені виділені траєкторії називаються **сепаратрисами**. У цьому випадку дві сепаратриси «входять» у сідлову особливу точку, а дві інші «виходять» із неї. Сепаратрисам відповідають рішення рівняння (14.12) виду

$$x - x_1 = A \exp(\pm \mu t). \quad (14.15)$$

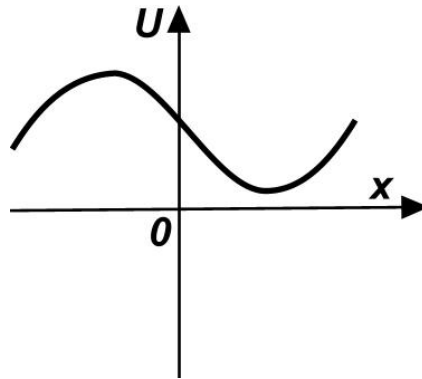
Таким чином, при $E = E_1$ частка нескінченно повільно «скочується» і «вкочується» в максимум потенційної енергії. При близьких енергіях зображуюча точка проходить на фазовій площині близько до сідлової точки і довго знаходиться в цій галузі.

Знання динаміки частки поблизу екстремальних точок потенційної енергії дозволяє побудувати повний фазовий портрет динамічної системи (Рис.4.2, нижній) і скласти враження про «глобальну» динаміку системи. У розглянутому випадку консервативного осцилятора всі особливі точки

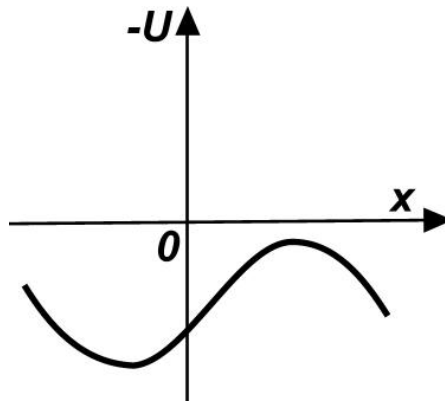
лежать на лінії $v = 0$ фазової площини і мають вигляд седел і центрів, що чергуються. На малюнку сепаратриси виділено червоним кольором. Видно, що вони "починаються" і "закінчуються" в сідлових точках або йдуть на нескінченність.

Процедура побудови фазового портрета.

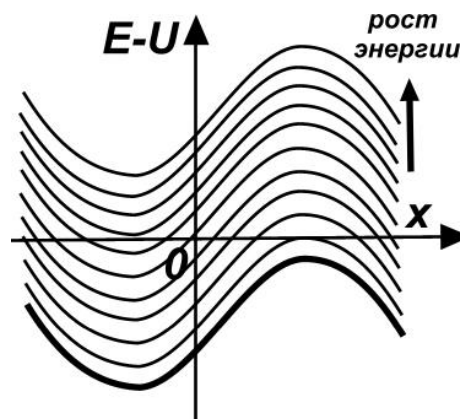
1. Зображаємо вид потенційної енергії



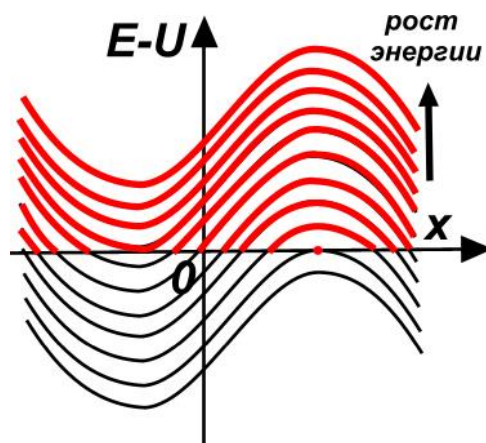
2. Будуємо величину $-U$



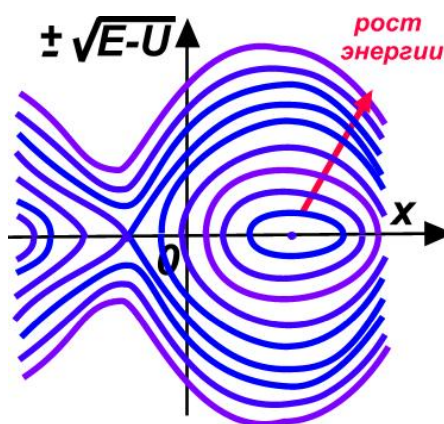
3. Будуємо систему цих ліній з різними значеннями енергії E . Кожному значенню енергії відповідатиме своя фазова траєкторія на фазовому портреті.



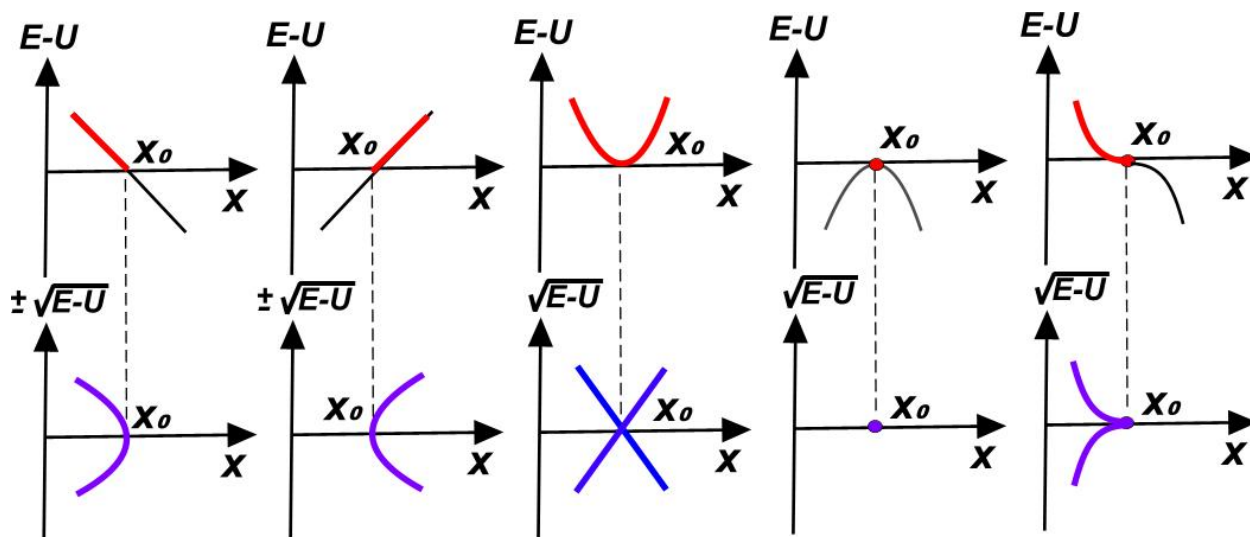
3. Виділити ті частини залежностей, які мають $E - U > 0$



4. Вилучаємо корінь алгебри $\pm\sqrt{E-U}$ для ділянок з позитивними значеннями $E-U > 0$.



При цьому на останньому етапі враховуємо вид перетворень:



На цих малюнках наведено основні типи перетворень.

$$E-U = \alpha^2(x_0 - x) \quad \rightarrow \quad \pm\sqrt{E-U} = \pm\alpha\sqrt{x_0 - x} \quad \text{коренева особливість}$$

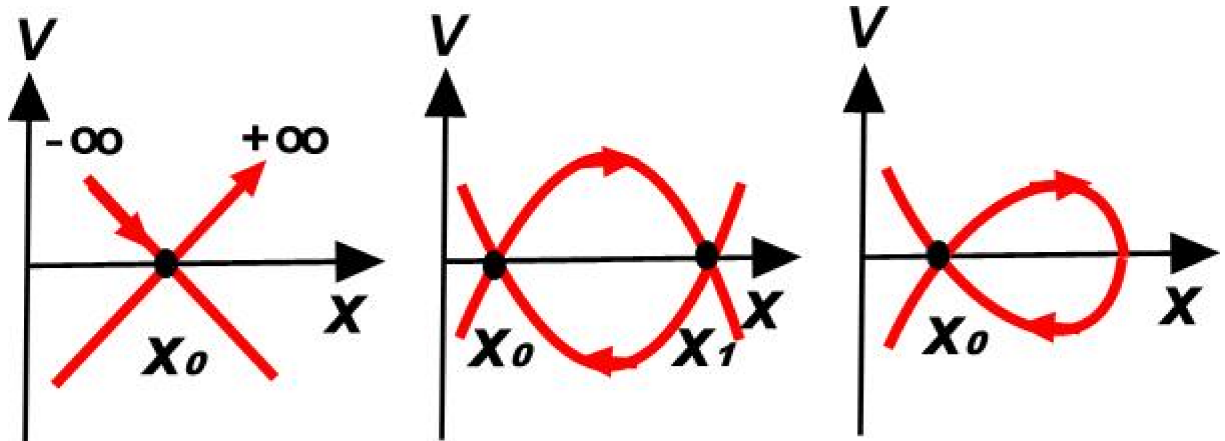
$$E-U = \alpha^2(x - x_0) \quad \rightarrow \quad \pm\sqrt{E-U} = \pm\alpha\sqrt{x - x_0} \quad \text{коренева особливість}$$

$$E - U = \alpha^2 (x_0 - x)^2 \quad \rightarrow \quad \pm \sqrt{E - U} = \pm \alpha (x_0 - x) \quad \text{особлива точка (сідло)}$$

$$E - U = -\alpha^2 (x_0 - x) \quad \rightarrow \quad \pm \sqrt{E - U} = 0, \quad x = x_0 \quad \text{особлива точка (центр)}$$

$$E - U = \alpha^3 (x_0 - x)^3 \quad \rightarrow \quad \pm \sqrt{E - U} = \pm \alpha (x_0 - x)^{3/2} \quad \text{особлива точка}$$

Класифікація сепаратрису .



З малюнків відео, що сепаратриси можуть «зв'язувати» сідлові точки з нескінченністю, зв'язувати дві різні сідлові точки і утворювати «сепаратрисні петлі», виходячи і входячи в одне і те ж сідло.

Наприклад, при коливанні частинки в потенційній ямі з енергією $E < E_1$ і $x < x_1$ (див. Рис.4.2) при малих амплітудах (маленькі еліпси навколо центру з x_0 на фазовому портреті) коливання носять лінійний характер з деякою частотою ω_0 . При енергіях, близьких до E_1 (синя лінія на Рис.4.2), точка, що зображає основну частину часу за період обертання проводить поблизу сідлової точки, а всю решту траєкторії проходить за час порядку $1/\omega_0$. Тому можна зробити якісний висновок про вид нелінійних коливань у цій галузі. Вони зображені на рис.4.4. Коливання частки періодичне, але з гармонійне. Тому його можна подати у вигляді ряду Фур'є виду $x(t) = \sum_n a_n \cos(n\omega t)$, що вказує на появу субгармонік у тимчасовій залежності коливання частки.

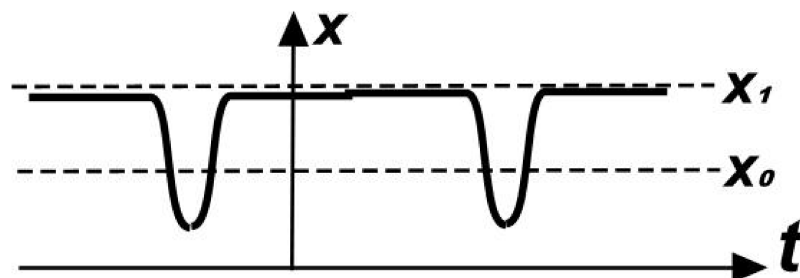


Рис.4.4. Профіль суттєво нелінійних коливань.

Оскільки на самій сепаратрисі рух відбувається за нескінченний час, то при тремленні енергії до величини E_1 частота повинна прагнути до нуля. Це дає можливість якісного розгляду приблизно відновити залежність частоти коливання від енергії. Вона наведена на Рис.4.5.

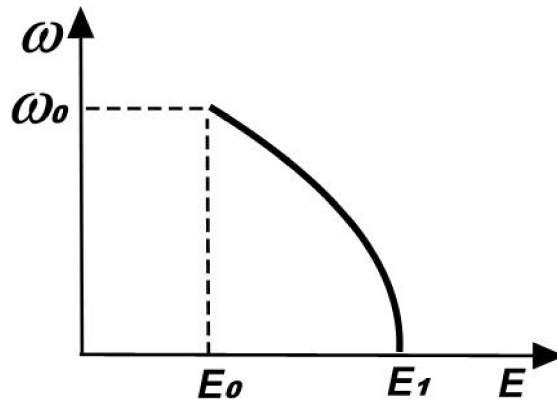


Рис.4.5. Якісна залежність частоти ангармонічного осцилятора від енергії.

Частоту коливання можна визначити з формули (14.6), записавши в разі потенціалу загального виду. При коливальному фінітному русі частка коливається між двома точками зупинки x_1 та x_2 на Рис.4.6.

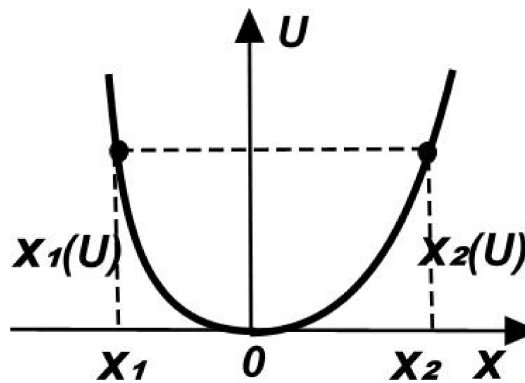


Рис.4.6. Фінітний рух матеріальної точки.

При заданій енергії положення точок зупинки визначається величиною повної енергії: $x_1 = x_1(E)$ і $x_2 = x_2(E)$ формула (14.6) переписеться у вигляді:

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \quad (14.16)$$

де точки визначаються нулями знаменника під інтегралом:

$$U(x_i) = E. \quad (14.17)$$

Відповідна частота коливання дорівнює $\omega = 2\pi / T$. Частота та період залежать від величини енергії, яка входить у межі інтегрування та у вираз під коренем у знаменнику (14.16). У деяких випадках нам відомий вид потенціалу $U(x)$. Але, зазвичай, фізична постановка завдання протилежна: в експерименті змінюється частота на систему і вимірюється, наприклад, поглинання поля залежно від інтенсивності зовнішнього поля. При цьому можна поставити питання про відновлення залежно від частоти енергії виду потенціалу. Тобто. у формулі (14.16) задати ліву частину $T = T(E)$ та по ній відновити вид потенціалу $U = U(x)$. Це приклад так званої **зворотної задачі**.

Перетворимо інтеграл (14.15), розглядаючи у ньому координату x як функцію U . Як очевидно з Рис.4.6, функція $x(U)$ двозначна. Замінімо dx на $(dx / dU)dU$ і перетворимо інтеграл:

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_E^0 \frac{dx_1}{dU} \frac{dU}{\sqrt{E-U}} + \sqrt{2m} \int_0^E \frac{dx_2}{dU} \frac{dU}{\sqrt{E-U}} = \sqrt{2m} \int_0^E \left(\frac{dx_2}{dU} - \frac{dx_1}{dU} \right) \frac{dU}{\sqrt{E-U}}. \quad (14.18)$$

Скористаємося таким формальним прийомом: заділимо цей вираз на $\sqrt{\alpha - E}$, де α - параметр, більший, ніж E , і проінтегруємо отримане по енергії E з $0 < E < \alpha$ в інтервалі $(0, \alpha)$. Праворуч виходить подвійний інтеграл із областю інтегрування, зображеною на Рис.4.7:

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha - E}} = \sqrt{2m} \int_0^\alpha dE \int_0^E dU \left(\frac{dx_2}{dU} - \frac{dx_1}{dU} \right) \frac{1}{\sqrt{(\alpha - E)(E - U)}}. \quad (14.19)$$

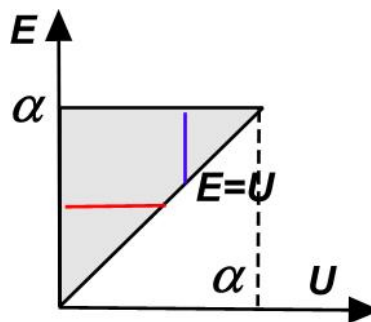


Рис.4.7. Области інтегрування подвійного інтеграла (14.19) і (14.20). Кольоровими тінями показані інтервали першого інтегрування у двох випадках.

Після зміни порядку інтегрування у правій частині (рис.4.7) переобчислимо (14.19) до виду

$$\int_0^\alpha \frac{T(E) dE}{\sqrt{\alpha - E}} = \sqrt{2m} \int_0^\alpha dU \int_U^\alpha dE \left(\frac{dx_2}{dU} - \frac{dx_1}{dU} \right) \frac{1}{\sqrt{(\alpha - E)(E - U)}} = \quad (14.20)$$

$$= \sqrt{2m} \int_0^\alpha \left(\frac{dx_2}{dU} - \frac{dx_1}{dU} \right) dU \int_U^\alpha \frac{dE}{\sqrt{(\alpha - E)(E - U)}}.$$

Інтеграл у правій частині заміною змінної $E = \frac{\alpha + U}{2} + \frac{\alpha - U}{2} z$ зводиться до вигляду

$$\int_U^\alpha \frac{dE}{\sqrt{(\alpha - E)(E - U)}} = \int_{-1}^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \pi.$$

Після цього інтеграл, що залишився, містить тільки повну похідну і зводиться до

$$\int_0^\alpha \frac{T(E) dE}{\sqrt{\alpha - E}} = \sqrt{2m\pi} (x_2(\alpha) - x_1(\alpha)). \quad (14.21)$$

Ця відповідь у неявному вигляді задає залежність потенційної енергії від координати за певної залежності частоти коливання від його енергії. Оскільки відповідь містить лише різницю $x_2 - x_1$, він неоднозначний, і неоднозначність знімається за умови симетрії потенціалу $x_2(U) = -x_1(U)$. І тут, якщо покласти параметр α рівним потенційної енергії, відповідь виглядає так:

$$x(U) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}} \int_0^U \frac{T(E) dE}{\sqrt{U - E}}. \quad (14.22)$$

Звичайно, потенційна енергія U менша за повну енергію E , тому цю формулу слід розглядати наступним чином: відому залежність $\omega(E)$ слід замінити на залежність від формального параметра $\omega(\xi)$. Цей параметр $\xi < U$ і фігурує (14.22) при взятті інтеграла.

Завдання №4а. Знайти (з точністю до чисельного множника) вид потенційної енергії $U = U(x)$, якщо залежність частоти коливань енергії має вигляд $\omega = \sqrt[4]{E}$.

Завдання №46. Знайти (з точністю до чисельного множника) вид потенційної енергії $U = U(x)$, якщо залежність частоти коливань енергії має вигляд $\omega = \sqrt{E}$. Що означає результат?